DOI：10.16285/j.rsm.2017.10.006

考虑三维波动的饱和土中管桩群桩的水平振动研究

刘林超，闫启方，闫 盼

（信阳师范学院 建筑与土木工程学院，河南 信阳 464000）

摘 要：考虑桩周饱和土和桩芯饱和土的三维波动效应研究了饱和土中管桩群桩的水平振动，得到了管桩群桩的水平动力阻抗。将桩周土和桩芯土视为两相饱和土，并利用多孔介质理论来描述其力学特性。运用数学物理手段求得了桩周饱和土和桩芯饱和土的水平动力阻抗。运用波的传播理论和叠加原理，同时考虑边界条件和三角函数的正交性，求得了管桩群桩中任一根管桩的水平作用力。考虑刚性承台处管桩桩顶位移协调条件和桩顶水平作用力平衡条件，得到了饱和土中管桩群桩的水平动力阻抗。以 2×2 管桩群桩为例分析和讨论了有关物理参量对饱和土中管桩群桩水平振动特性的影响。研究结果表明：实芯群桩与管桩群桩的水平动力阻抗都存在一定的差异，频率较小时需要考虑桩芯饱和土与桩周饱和土性质的差异对管桩水平动力阻抗的影响，管桩长径比和管桩壁厚对饱和土中管桩群桩水平振动的影响较大，在实际工程设计中需要重点考虑桩身尺寸。

关 键 词：管桩群桩；水平振动；叠加原理；动力阻抗；饱和土

中图分类号：TU 473 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－7598 (2017) 10－2817－09

Horizontal vibration of pipe pile groups in saturated soil considering three-dimensional wave effects

LIU Lin-chao, YAN Qi-fang, YAN Pan

（School of Architecture and Civil Engineering, Xinyang Normal University, Xinyang, Henan 464000, China）

Abstract: The horizontal vibration of the pipe pile groups in saturated soil is studied by considering three-dimensional wave effects on the saturated soil, and the horizontal dynamic impedance of pipe pile groups is also obtained. The soil around pile and pile core soil are considered as two-phase saturated soil, and the mechanical property of the saturated soil is described by the theory of porous medium. The horizontal dynamic impedances of the saturated soil around pile and in pile core are obtained by using the mathematical physics means. Using the wave spread theory and superposition principle, the horizontal force of any pipe pile is obtained by considering boundary conditions and orthogonality of trigonometric functions. The horizontal dynamic impedances of pipe pile groups in saturated soil is obtained by considering the displacement compatibility conditions and horizontal force equilibrium conditions at pipe pile top at rigid cap. The influences of physical parameters on the dynamic characteristics of pipe pile groups in saturated soil are analyzed and discussed by using 2×2 pipe pile groups as an example. The result indicates that there are some differences between the horizontal dynamic impedances of the solid core pile groups and the pipe pile groups. It needs to consider the influence of the difference between the saturated soil around pile and in pile core on the dynamic impedance of pipe pile groups in saturated soil. Length to diameter ratio and wall thickness of pipe pile have great effect on the horizontal vibration of pipe pile groups in saturated soil, showing that the size of pipe pile should be focused in the actual engineering design.

Keywords: pipe pile groups; horizontal vibration; superposition principle; dynamic impedance; saturated soil

1 引 言

作为一种深基础形式，桩基以其承载力大、强度高、耐久性好等优点而广泛地应用到高耸建筑基础、海洋平台基础、动力机器基础等众多工程领域，而这些领域往往需要承受风荷载、地震荷载、动力机器荷载等各种形式的动态激励，所以桩−土动力相互作用问题一直是研究的热点和难点[1−6]。随着现代

收稿日期：2015-11-11
基金项目：国家自然科学基金(No. U1504505)；河南省科技发展计划项目(No. 142300410200)；河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目(No.2013GGJS-121)；信阳师范学院南湖学者奖励计划青年项目(No. 201506)。
This work was supported by the National Nature Science Foundation of China (U1504505), the Henan Foundation for Development of Science and Technology (142300410200), the Foundation for Outstanding Young Teachers in Higher Education Institutions of Henan Province (2013GGJS-121) and the Nanhu Scholars Program for Young Scholars of XYNU (201506).
第一作者简介：刘林超，男，1979 年生，博士，副教授，硕士生导师，主要从事黏弹性理论、岩土力学等方面的教学和科研。E-mail: llc109@126.com

桩基工程技术的发展，不断涌现出各种形式的桩基和桩基施工方法，而管桩作为一种近几十年发展起来的一种新型桩基形式，由于具有承载力和强度高、抗弯抗拉性能好、造价低、耐久性好等优点在铁道桥梁工程、建筑工程、高速公路、市政工程加固等工程领域得到广泛应用。所以，近年来不少学者针对管桩的振动特性开展了相关的研究[7−10]。需要说明的是，已有的关于管桩振动特性的研究都是将桩周土和桩芯土视为单相介质，由于实际工程中土体通常以饱和土的形式存在，忽略液相的影响来研究管桩的振动特性势必与工程实际不符。为此，郑长杰等[11]基于经典的平面应变假定，将土体假设为若干个相互独立的薄层，对饱和土地基中现浇大直径管桩水平振动频域特性进行了理论研究；靳建明等[12]基于 Biot 饱和土波动方程对均质各向同性饱和土中端承管桩的扭转振动进行了研究；刘林超等[13−14]基于多孔介质理论，对饱和土中单桩的水平和纵向振动进行了研究。由于桩基通常是以群桩的形式出现，所以针对管桩群桩开展动态特性的研究具有十分重要的工程应用价值，由于问题的复杂性，有关管桩−管桩和管桩群桩振动特性的研究还未见报道。考虑到多孔介质理论能够把微观性质直接通过宏观性质来描述，能够避免杂交混合物理论中繁杂的公式，同时还能够在不需要额外假定的条件下，把动力、材料和几何非线性等一些效应较容易地反映在其数学模型中。本文将基于多孔介质理论，利用波动传播理论和叠加原理，对饱和土中管桩群桩的水平振动进行研究，得到饱和土中管桩群桩水平动力阻抗的半解析解，同时分析有关桩基和饱和土物理参量对管桩群桩水平动力阻抗的影响规律。

2 桩周和桩芯饱和土的水平振动求解

研究刚性承台下管桩群桩，刚性承台作用有一水平简谐力 $\bar{P}_0=\tilde{P}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$（$\omega$ 为荷载频率，i 为虚数单位）。为了计算方便，假设管桩桩周和桩芯土均为饱和土，且桩芯饱和土完全充满管桩；管桩为嵌岩管桩，桩底为基岩；桩身为混凝土，且为等截面的圆环；桩周饱和土和桩芯饱和土与管桩完全接触，无相对滑移和脱落；管桩与饱和土变形均为小变形；在振动过程中不考虑饱和土的液化和消散问题。各根管桩外半径、内半径均分别为 r_O、r_I，桩身混凝土弹性模量为 E_p，桩长为 H。

在三维条件下，对于管桩群桩中任一根管桩的桩周饱和土和桩芯饱和土（见图 1），在忽略土体竖向位移的情况下，运用多孔介质理论可以建立其运动控制方程分别为[15−16]

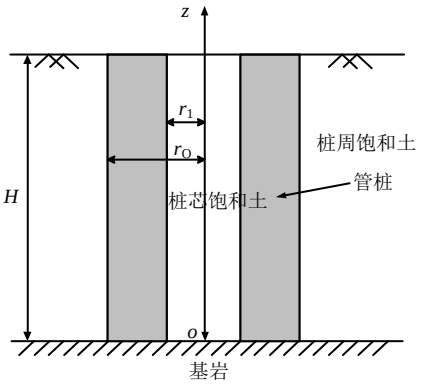


图 1 饱和土−管桩模型

Fig.1 Saturated soil-pipe pile model

$$(\lambda_\beta^\mathrm{S}+2\mu_\beta^\mathrm{S})\frac{\partial\omega_{\beta r}^\mathrm{S}}{\partial r}-\frac{2}{r}\mu_\beta^\mathrm{S}\frac{\partial\omega_{\beta\theta}^\mathrm{S}}{\partial\theta}+\mu_\beta^\mathrm{S}\frac{\partial^2u_{\beta r}^\mathrm{S}}{\partial z^2}-\frac{\partial p_\beta}{\partial r}-\rho_\beta^\mathrm{S}\frac{\partial^2u_{\beta r}^\mathrm{S}}{\partial t^2}-\rho_\beta^\mathrm{F}\frac{\partial^2u_{\beta r}^\mathrm{F}}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

$$(\lambda_\beta^\mathrm{S}+2\mu_\beta^\mathrm{S})\frac{\partial\omega_{\beta r}^\mathrm{S}}{r\partial\theta}+2\mu_\beta^\mathrm{S}\frac{\partial\omega_{\beta\theta}^\mathrm{S}}{\partial r}+\mu_\beta^\mathrm{S}\frac{\partial^2u_{\beta\theta}^\mathrm{S}}{\partial z^2}-\frac{\partial p_\beta}{\partial\theta}-\rho_\beta^\mathrm{S}\frac{\partial^2u_{\beta\theta}^\mathrm{S}}{\partial t^2}-\rho_\beta^\mathrm{F}\frac{\partial^2u_{\beta\theta}^\mathrm{F}}{\partial t^2}=0 \tag{2}$$

$$-n_\beta^\mathrm{F}\frac{\partial p_\beta}{\partial r}-\rho_\beta^\mathrm{F}\frac{\partial^2u_{\beta r}^\mathrm{F}}{\partial t^2}-s_{\beta\mathrm{v}}\left(\frac{\partial u_{\beta r}^\mathrm{F}}{\partial t}-\frac{\partial u_{\beta r}^\mathrm{S}}{\partial t}\right)=0 \tag{3}$$

$$-n_\beta^\mathrm{F}\frac{1}{r}\frac{\partial p_\beta}{\partial\theta}-\rho_\beta^\mathrm{F}\frac{\partial^2u_{\beta\theta}^\mathrm{F}}{\partial t^2}-s_{\beta\mathrm{v}}\left(\frac{\partial u_{\beta\theta}^\mathrm{F}}{\partial t}-\frac{\partial u_{\beta\theta}^\mathrm{S}}{\partial t}\right)=0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(n_\beta^\mathrm{S}\frac{\partial u_{\beta r}^\mathrm{S}}{\partial t}+n_\beta^\mathrm{F}\frac{\partial u_{\beta r}^\mathrm{F}}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(n_\beta^\mathrm{S}\frac{\partial u_{\beta r}^\mathrm{S}}{\partial t}+n_\beta^\mathrm{F}\frac{\partial u_{\beta r}^\mathrm{F}}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(n_\beta^\mathrm{S}\frac{\partial u_{\beta z}^\mathrm{S}}{\partial t}+n_\beta^\mathrm{F}\frac{\partial u_{\beta z}^\mathrm{F}}{\partial t}\right)=0 \tag{5}$$

式中：β=O、I 分别代表桩周饱和土和桩芯饱和土；$\omega_{\beta r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_{\beta r}^\mathrm{S})+\frac{1}{r}\frac{\partial u_{\beta\theta}^\mathrm{S}}{\partial\theta}$；$\omega_{\beta\theta}=\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_{\beta\theta}^\mathrm{S})-\frac{\partial u_{\beta r}^\mathrm{S}}{\partial\theta}\right]$；$\lambda_\beta^\mathrm{S}=\frac{2\upsilon_\beta}{1-2\upsilon_\beta}\mu_\beta^\mathrm{S}$，$\lambda_\beta^\mathrm{S}$、$\mu_\beta^\mathrm{S}$ 为饱和土的 Lame 常数，υ_β 为饱和土的泊松比。当不考虑饱和土黏性时 $\mu_\beta^\mathrm{S}=G_\beta^\mathrm{S}$，$G_\beta^\mathrm{S}$ 为饱和土固相土骨架的剪切模量；$u_{\beta r}^\mathrm{S}$、$u_{\beta\theta}^\mathrm{S}$ 为饱和土固相的径向位移和环向位移；$u_{\beta r}^\mathrm{F}$、$u_{\beta\theta}^\mathrm{F}$ 为饱和土液相的径向位移和环向位移；ρ_β^S、ρ_β^F 分别为饱和土固相和液相的表观密度；$s_{\beta\mathrm{v}}$

为饱和土的液-固耦合系数；n_β^{S}、n_β^{F}分别为饱和土固相和液相的体积分数，且满足$n_\beta^{\mathrm{S}}+n_\beta^{\mathrm{F}}=1$。

由于在水平简谐荷载作用下，管桩-土系统的振动为稳态振动，则各参量具有满足$f=\tilde{f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，将其代入式（1）～（5）中并忽略左右两边的$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，同时令$\bar{r}=\dfrac{r}{H}$，$\bar{u}_{\mathrm{O}r}^{\mathrm{S}}=\dfrac{\tilde{u}_{\mathrm{O}r}^{\mathrm{S}}}{H}$，$\bar{u}_{\mathrm{O}\theta}^{\mathrm{S}}=\dfrac{\tilde{u}_{\mathrm{O}\theta}^{\mathrm{S}}}{H}$，$\bar{u}_{\mathrm{I}r}^{\mathrm{S}}=\dfrac{\tilde{u}_{\mathrm{I}r}^{\mathrm{S}}}{H}$，$\bar{u}_{\mathrm{I}\theta}^{\mathrm{S}}=\dfrac{\tilde{u}_{\mathrm{I}\theta}^{\mathrm{S}}}{H}$，$\bar{p}_{\mathrm{O}}=\dfrac{\tilde{p}_{\mathrm{O}}}{v_{\mathrm{Os}}^2\rho_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}$，$S_{\mathrm{O}\upsilon}=\dfrac{Hs_{\mathrm{O}\upsilon}}{v_{\mathrm{Os}}\rho_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}$，$\bar{\omega}=\dfrac{H\omega}{v_{\mathrm{Os}}}$，$\bar{\rho}_{\mathrm{O}}=\dfrac{\rho_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}{\rho_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}}$，$v_{\mathrm{Os}}=\sqrt{\dfrac{G_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}{\rho_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}}$，$G^{\mathrm{S}}=\dfrac{G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}}{G_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}$，$\rho^{\mathrm{S}}=\dfrac{\rho_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}}{\rho_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}$，$\bar{\rho}_{\mathrm{I}}=\dfrac{\rho_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}}{\rho_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}}$，$S_{\mathrm{I}\upsilon}=\dfrac{Hs_{\mathrm{I}\upsilon}}{v_{\mathrm{Os}}\rho_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}$，$S_{\mathrm{O}\upsilon}$和$S_{\mathrm{I}\upsilon}$分别为桩周饱和土和桩芯饱和土液-固耦合系数的无量纲量，$s_{\mathrm{O}\upsilon}$和$s_{\mathrm{I}\upsilon}$分别为桩周饱和土和桩芯饱和土液-固耦合系数。对各参量和式（1）～（5）进行无量纲运算。为了对无量纲化的式（1）～（5）进行解耦，令

$$\bar{u}_{\beta r}^{\mathrm{S}}=\frac{\partial\bar{\varphi}_\beta^{\mathrm{S}}}{\partial\bar{r}}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\psi}_\beta^{\mathrm{S}}}{\partial\theta},\ \bar{u}_{\beta\theta}^{\mathrm{S}}=\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\varphi}_\beta^{\mathrm{S}}}{\partial\theta}-\frac{\partial\bar{\psi}_\beta^{\mathrm{S}}}{\partial\bar{r}} \tag{6}$$

$$\bar{u}_{\beta r}^{\mathrm{F}}=\frac{\partial\bar{\varphi}_\beta^{\mathrm{F}}}{\partial\bar{r}}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\psi}_\beta^{\mathrm{F}}}{\partial\theta},\ \bar{u}_{\beta\theta}^{\mathrm{F}}=\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\varphi}_\beta^{\mathrm{F}}}{\partial\theta}-\frac{\partial\bar{\psi}_\beta^{\mathrm{F}}}{\partial\bar{r}} \tag{7}$$

式中：$\bar{\varphi}_\beta^{\mathrm{S}}$、$\bar{\psi}_\beta^{\mathrm{S}}$、$\bar{\varphi}_\beta^{\mathrm{F}}$、$\bar{\psi}_\beta^{\mathrm{F}}$代表为解耦式（1）～（5）引入的势函数的无量纲量。

对桩周饱和土，则有

$$\frac{2-2\upsilon_{\mathrm{O}}}{1-2\upsilon_{\mathrm{O}}}\nabla^2\bar{\varphi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}+\frac{\partial^2\bar{\varphi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}{\partial\bar{z}^2}-\bar{p}_{\mathrm{O}}+\bar{\omega}^2\bar{\varphi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}+\frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{O}}}\bar{\varphi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}=0 \tag{8}$$

$$\nabla^2\bar{\psi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}+\frac{\partial^2\bar{\psi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}{\partial\bar{z}^2}+\bar{\omega}^2\bar{\psi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}+\frac{\omega^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{O}}}\bar{\psi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}=0 \tag{9}$$

$$-n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}\bar{p}_{\mathrm{O}}+\left(\frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{O}}}-\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{O}\upsilon}\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}+\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{O}\upsilon}\bar{\varphi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}=0 \tag{10}$$

$$\left(\frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{O}}}-\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{O}\upsilon}\right)\bar{\psi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}+\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{O}\upsilon}\bar{\psi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}=0 \tag{11}$$

$$n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}\left(\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}+n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}\left(\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}=0 \tag{12}$$

对桩芯饱和土，则有

$$\frac{2-2\upsilon_{\mathrm{I}}}{1-2\upsilon_{\mathrm{I}}}G^{\mathrm{S}}\nabla^2\bar{\varphi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}+G^{\mathrm{S}}\frac{\partial^2\varphi_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}}{\partial\bar{z}^2}-\bar{p}_{\mathrm{I}}+\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2\bar{\varphi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}+\frac{\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{I}}}\bar{\varphi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}=0 \tag{13}$$

$$G^{\mathrm{S}}\nabla^2\bar{\psi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}+G^{\mathrm{S}}\frac{\partial^2\bar{\psi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}}{\partial\bar{z}^2}+\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2\bar{\psi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}+\frac{\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{I}}}\bar{\psi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}=0 \tag{14}$$

$$-n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}\bar{p}_{\mathrm{I}}+\left(\frac{\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{I}}}-\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{I}\upsilon}\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}+\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{I}\upsilon}\bar{\varphi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}=0 \tag{15}$$

$$\left(\frac{\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{I}}}-\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{I}\upsilon}\right)\bar{\psi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}+\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{I}\upsilon}\bar{\psi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}=0 \tag{16}$$

$$n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}\left(\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}+n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}\left(\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}=0 \tag{17}$$

求解式（9）、（11），由于桩周饱和土径向位移为θ的偶函数，而环向位移为θ的奇函数，考虑无穷远处位移为 0 的边界条件可得

$$\bar{\psi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}=K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r})[A_{\mathrm{O}1}\sin(h_{\mathrm{O}}\bar{z})+B_{\mathrm{O}1}\cos(h_{\mathrm{O}}\bar{z})]\sin\theta \tag{18}$$

$$\bar{\psi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}=a_{\mathrm{O}1}K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r})[A_{\mathrm{O}1}\sin(h_{\mathrm{O}}\bar{z})+B_{\mathrm{O}1}\cos(h_{\mathrm{O}}\bar{z})]\sin\theta \tag{19}$$

式中：$a_{\mathrm{O}1}=\dfrac{\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{\rho}_{\mathrm{O}}S_{\mathrm{O}\upsilon}}{\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{\rho}_{\mathrm{O}}S_{\mathrm{O}\upsilon}-\bar{\omega}^2}$；$q_{\mathrm{O}}^2=h_{\mathrm{O}}^2-a_{\mathrm{O}2}$，$a_{\mathrm{O}2}=\dfrac{(a_{\mathrm{O}1}+\bar{\rho}_{\mathrm{O}})\omega^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{O}}}$；$A_{\mathrm{O}1}$、$B_{\mathrm{O}1}$为待定系数。

求解式（8）、（10）、（12），考虑桩周饱和土位移的奇偶性和无穷远处位移为 0 的条件，以及桩周饱和土底部和顶部的边界条件可得各参量的级数形式解为

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\psi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}=\sin\theta\sum_{k=1}^{\infty}C_{\mathrm{O}2k}K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r})\sin(\alpha_k\bar{z})\\
&\bar{\psi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}=\sin\theta\sum_{k=1}^{\infty}a_{\mathrm{O}1}C_{\mathrm{O}2k}K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r})\sin(\alpha_k\bar{z})\\
&\bar{\varphi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}=\cos\theta\sum_{k=1}^{\infty}[C_{\mathrm{O}1k}K_1(\alpha_k\bar{r})+\frac{D_{\mathrm{O}1k}K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r})}{s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2}]\sin(\alpha_k\bar{z})\\
&\bar{\varphi}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}=\cos\theta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_{\mathrm{O}5}}[(a_{\mathrm{O}3}\alpha_k^2-\alpha_k^2-a_{\mathrm{O}4})K_1(\alpha_k\bar{r})C_{\mathrm{O}1k}+\\
&\frac{(a_{\mathrm{O}3}\alpha_k^2-s_{\mathrm{O}}^2-a_{\mathrm{O}4})D_{\mathrm{O}1k}K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r})}{s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2}]\sin(\alpha_k\bar{z})\\
&\bar{p}_{\mathrm{O}}=\cos\theta\sum_{k=1}^{\infty}[a_{\mathrm{O}6}K_1(\alpha_k\bar{r})C_{\mathrm{O}1k}+a_{\mathrm{O}7}K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r})D_{\mathrm{O}1k}]\cdot\\
&\sin(\alpha_k\bar{z})
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

式中：$C_{\mathrm{O}1k}$、$C_{\mathrm{O}2k}$、$D_{\mathrm{O}1k}$为待定系数；

$a_{\mathrm{O}3}=\dfrac{1-2\upsilon_{\mathrm{O}}}{2-2\upsilon_{\mathrm{O}}}$，$a_{\mathrm{O}4}=\dfrac{1-2\upsilon_{\mathrm{O}}}{2-2\upsilon_{\mathrm{O}}}\left(\bar{\omega}^2-\dfrac{\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{O}\upsilon}}{n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}}\right)$；

$a_{\mathrm{O}5}=\dfrac{1-2\upsilon_{\mathrm{O}}}{2-2\upsilon_{\mathrm{O}}}\left(\dfrac{\bar{\omega}^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{O}}}-\dfrac{\bar{\omega}^2-\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{\rho}_{\mathrm{O}}S_{\mathrm{O}\upsilon}}{n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}\bar{\rho}_{\mathrm{O}}}\right)$；

$a_{\mathrm{O}6}=\dfrac{\bar{\omega}^2-\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{\rho}_{\mathrm{O}}S_{\mathrm{O}\upsilon}}{n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}\bar{\rho}_{\mathrm{O}}}\dfrac{1}{a_{\mathrm{O}5}}(a_{\mathrm{O}3}\alpha_k^2-\alpha_k^2-a_{\mathrm{O}4})+\dfrac{\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{O}\upsilon}}{n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}}$；

$a_{\mathrm{O7}}=\dfrac{\bar{\omega}^2-\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{\rho}_{\mathrm{O}}S_{\mathrm{O}\upsilon}}{n_{\mathrm{O}}^{F}\bar{\rho}_{\mathrm{O}}}\dfrac{(a_{\mathrm{O3}}\alpha_k^2-s_{\mathrm{O}}^2-a_{\mathrm{O4}})}{s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2}+\dfrac{\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{O}\upsilon}}{n_{\mathrm{O}}^{F}}\dfrac{1}{s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2}$；

$s_{\mathrm{O}}^2=a_{\mathrm{O3}}h_{\mathrm{O}}^2-a_{\mathrm{O4}}+\dfrac{n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}a_{\mathrm{O5}}}{n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}}$，$h_{\mathrm{O}}=\alpha_k=\dfrac{(2k-1)\pi}{2}$，$k$=1、2、3…。

设管桩与桩周饱和土接触面处不透水，即 $\left.\dfrac{\partial\bar{p}_{\mathrm{O}}}{\partial\bar{r}}\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathrm{O}}}=0$，由式（20）可得 $D_{\mathrm{O1}k}=-\dfrac{a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}}{a_{\mathrm{O7}}}C_{\mathrm{O1}k}$，$a_{\mathrm{O8}}=\dfrac{\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{O}}K_0(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{O}})+K_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{O}})}{s_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}}K_0(s_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})+K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})}$。则桩周饱和土的孔隙水压力可整理为

$$\bar{p}_{\mathrm{O}}=\cos\theta\sum_{k=1}^{\infty}P_{\mathrm{O}k}C_{1k}\sin(\alpha_k\bar{z}) \tag{21}$$

式中：$P_{\mathrm{O}k}=a_{\mathrm{O6}}K_1(\alpha_k\bar{r})-a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r})$。

由式（6）、（7）、（20）可得桩周饱和土的径向和环向位移分别为

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\mathrm{O}r}^{\mathrm{S}}=\cos\theta\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{&-[\alpha_kK_0(\alpha_k\bar{r})+\frac{1}{\bar{r}}K_1(\alpha_k\bar{r})]C_{\mathrm{O1}k}+\\&\frac{a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}}{(s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{O7}}}[s_{\mathrm{O}}K_0(s_{\mathrm{O}}\bar{r})+\frac{1}{\bar{r}}K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r})]C_{\mathrm{O1}k}+\\&\frac{1}{\bar{r}}C_{\mathrm{O2}k}K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r})\Bigg\}\sin(\alpha_k\bar{z})\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\mathrm{O}\theta}^{\mathrm{S}}=\sin\theta\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{&-\frac{1}{\bar{r}}K_1(\alpha_k\bar{r})C_{\mathrm{O1}k}+\frac{a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}}{a_{\mathrm{O7}}(s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2)}\cdot\\&\frac{K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r})}{\bar{r}}C_{\mathrm{O1}k}+[q_{\mathrm{O}}K_0(q_{\mathrm{O}}\bar{r})+\frac{1}{\bar{r}}K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r})]C_{\mathrm{O2}k}\Bigg\}\cdot\\&\sin(\alpha_k\bar{z})\end{aligned} \tag{23}$$

同桩周饱和土一样的求解方法，对桩芯饱和土的方程式（13）～（17）进行求解，可得桩芯饱和土的径向位移和环向位移、孔隙水压力分别为

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\mathrm{I}r}^{\mathrm{S}}=\cos\theta\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{&[\alpha_kI_0(\alpha_k\bar{r})-\frac{1}{\bar{r}}I_1(\alpha_k\bar{r})]C_{\mathrm{I1}k}-\\&\frac{a_{\mathrm{I6}}a_{\mathrm{I8}}}{(s_{\mathrm{I}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{I7}}}[s_{\mathrm{I}}I_0(s_{\mathrm{I}}\bar{r})-\frac{1}{\bar{r}}I_1(s_{\mathrm{I}}\bar{r})]C_{\mathrm{I1}k}-\\&\frac{1}{\bar{r}}I_1(s_{\mathrm{I}}\bar{r})]C_{\mathrm{I1}k}+\frac{1}{\bar{r}}I_1(q_{\mathrm{I}}\bar{r})C_{\mathrm{I2}k}\Bigg\}\sin(\alpha_k\bar{z})\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\mathrm{I}\theta}^{\mathrm{S}}=\sin\theta\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{&-C_{\mathrm{I1}k}\frac{1}{\bar{r}}I_1(\alpha_k\bar{r})+\frac{a_{I6}a_{I8}}{a_{\mathrm{I7}}(s_{\mathrm{I}}^2-\alpha_k^2)}\frac{I_1(s_{\mathrm{I}}\bar{r})}{\bar{r}}C_{\mathrm{I1}k}-\\&[q_kI_0(q_k\bar{r})-\frac{1}{\bar{r}}I_1(q_k\bar{r})]C_{\mathrm{I2}k}\Bigg\}\sin(\alpha_k\bar{z})\end{aligned} \tag{25}$$

$$\bar{p}_{\mathrm{I}}=\cos\theta\sum_{k=1}^{\infty}P_{\mathrm{I}}C_{\mathrm{I1}k}\sin(\alpha_k\bar{z}) \tag{26}$$

式中：$P_{\mathrm{I}k}=a_{\mathrm{I6}}I_1(\alpha_k\bar{r})-a_{\mathrm{I6}}a_{\mathrm{I8}}I_1(s_{\mathrm{I}}\bar{r})$，

$s_{\mathrm{I}}^2=a_{\mathrm{I3}}a_k^2-a_{\mathrm{I4}}+\dfrac{n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}a_{\mathrm{I5}}}{n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}}$；$q_{\mathrm{I}}^2=a_k^2-a_{\mathrm{I2}}$；

$a_{\mathrm{I1}}=\dfrac{\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{\rho}_{\mathrm{I}}S_{\mathrm{I}\upsilon}}{\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{\rho}_{\mathrm{I}}S_{\mathrm{I}\upsilon}-\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2}$；$a_{\mathrm{I2}}=\dfrac{(\bar{\rho}_{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{S}}+\rho^{\mathrm{S}}a_{\mathrm{I1}})\bar{\omega}^2}{G^{\mathrm{S}}\bar{\rho}_{\mathrm{I}}}$；

$a_{\mathrm{I3}}=\dfrac{1-2\upsilon_{\mathrm{I}}}{2-2\upsilon_{\mathrm{I}}}$；$a_{\mathrm{I4}}=\dfrac{1-2\upsilon_{\mathrm{I}}}{(2-2\upsilon_{\mathrm{I}})\ G^{\mathrm{S}}}\left(\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2-\dfrac{\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{I}\upsilon}}{n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}}\right)$；

$a_{\mathrm{I5}}=\dfrac{1-2\upsilon_{\mathrm{I}}}{(2-2\upsilon_{\mathrm{I}})\ G^{\mathrm{S}}}\left(\dfrac{\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2}{\bar{\rho}_{\mathrm{I}}}-\dfrac{\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2-\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{\rho}_{\mathrm{I}}S_{\mathrm{I}\upsilon}}{n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}\bar{\rho}_{\mathrm{I}}}\right)$；

$a_{\mathrm{I6}}=\dfrac{\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2-\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{\rho}_{\mathrm{I}}S_{\mathrm{I}\upsilon}}{n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}\bar{\rho}_{\mathrm{I}}}\dfrac{1}{a_{\mathrm{I5}}}[(a_{\mathrm{I3}}\alpha_k^2-\alpha_k^2-a_{\mathrm{I4}})+\dfrac{\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{I}\upsilon}}{n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}}$；

$a_{\mathrm{I7}}=\dfrac{\rho^{\mathrm{S}}\bar{\omega}^2-\mathrm{i}\bar{\omega}\bar{\rho}_{\mathrm{I}}S_{\mathrm{I}\upsilon}}{n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}\bar{\rho}_{\mathrm{I}}}\dfrac{(a_{\mathrm{I3}}\alpha_k^2-s_{\mathrm{I}}^2-a_{\mathrm{I4}})}{s_{\mathrm{I}}^2-\alpha_k^2}+\dfrac{\mathrm{i}\bar{\omega}S_{\mathrm{I}\upsilon}}{n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}}\dfrac{1}{s_{\mathrm{I}}^2-\alpha_k^2}$；

$a_{\mathrm{I8}}=\dfrac{\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{I}}I_0(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{I}})-I_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{I}})}{s_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}}I_0(s_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})-I_1(s_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})}$。

3 桩周和桩芯饱和土水平动力阻抗

假设管桩与桩周饱和土和桩芯饱和土完全接触，则管桩与桩周饱和土和桩芯饱和土接处面位移连续性边界条件分别为

$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}_{\mathrm{O}r}^{\mathrm{S}}(\bar{r},\theta)=\bar{u}_{ip}\ ,\bar{r}=\bar{r}_{\mathrm{O}},\theta=0\\&\bar{u}_{\mathrm{O}\theta}^{\mathrm{S}}(\bar{r},\theta)=-\bar{u}_{ip},\ \bar{r}=\bar{r}_{\mathrm{O}},\theta=\frac{\pi}{2}\\&\bar{u}_{\mathrm{I}r}^{\mathrm{S}}(\bar{r},\theta)=\bar{u}_{ip}\ ,\ \bar{r}=\bar{r}_{\mathrm{I}},\theta=0\\&\bar{u}_{\mathrm{I}\theta}^{\mathrm{S}}(\bar{r},\theta)=-\bar{u}_{ip},\ \bar{r}=\bar{r}_{\mathrm{I}},\theta=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

式中：$\bar{u}_{ip}$ 为无量纲化后的管桩群桩中第 i 根管桩的水平位移幅值。

由式（22）～（25）、（27）可得

$$C_{\mathrm{O2}k}=a_{\mathrm{O9}}C_{\mathrm{O1}k}\ ,\ C_{\mathrm{I2}k}=a_{\mathrm{I9}}C_{\mathrm{I1}k} \tag{28}$$

式中：$a_{\mathrm{O9}}=\dfrac{\bar{r}_{\mathrm{O}}\alpha_kK_0(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{O}})+2K_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{O}})}{\bar{r}_{\mathrm{O}}q_{\mathrm{O}}K_0(q_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})+2K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})}-$

$\dfrac{a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}}{(s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{O7}}}\dfrac{\bar{r}_{\mathrm{O}}s_{\mathrm{O}}K_0(s_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})+2K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})}{\bar{r}_{\mathrm{O}}q_{\mathrm{O}}K_0(q_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})+2K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})}$，

$a_{\mathrm{I9}}=\dfrac{\bar{r}_{\mathrm{I}}\alpha_kI_0(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{I}})-2I_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{I}})}{\bar{r}_{\mathrm{I}}q_{\mathrm{I}}I_0(q_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})-2I_1(q_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})}-$

$\dfrac{a_{\mathrm{I6}}a_{\mathrm{I8}}}{(s_{\mathrm{I}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{I7}}}\dfrac{\bar{r}_{\mathrm{I}}s_{\mathrm{I}}I_0(s_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})-2I_1(s_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})}{\bar{r}_{\mathrm{I}}q_{\mathrm{I}}I_0(q_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})-2I_1(q_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})}$。

由式（22）、（24）、（27）可得管桩水平位移幅值为

$$\bar{u}_{ip}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{\mathrm{O10}}C_{\mathrm{O1}k}\sin(\alpha_k\bar{z})=\sum_{k=1}^{\infty}a_{\mathrm{I10}}C_{\mathrm{I1}k}\sin(\alpha_k\bar{z}) \tag{29}$$

式中：

$$a_{\mathrm{O10}}=-\left[\alpha_k K_0(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{O}})+\frac{1}{\bar{r}_{\mathrm{O}}}K_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{O}})\right]+$$

$$\frac{a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}}{(s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{O7}}}\left[s_{\mathrm{O}}K_0(s_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})+\frac{1}{\bar{r}_{\mathrm{O}}}K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})\right]+\frac{a_{\mathrm{O9}}}{\bar{r}_{\mathrm{O}}}K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})\,;$$

$$a_{\mathrm{I10}}=\alpha_k I_0(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{I}})-\frac{1}{\bar{r}_{\mathrm{I}}}I_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{I}})-$$

$$\frac{a_{\mathrm{I6}}a_{\mathrm{I8}}}{(s_{\mathrm{I}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{I7}}}[s_{\mathrm{I}}I_0(s_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})-\frac{1}{\bar{r}_{I}}I_1(s_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})]+\frac{a_{\mathrm{I9}}}{\bar{r}_{\mathrm{I}}}I_1(q_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})\,;$$

$$C_{\mathrm{I1}k}=\frac{a_{\mathrm{O10}}}{a_{\mathrm{I10}}}C_{\mathrm{O1}k}\,。$$

由式（22）、（23）可得桩周饱和土沿水平方向的位移为

$$\bar{u}_{\mathrm{O}x}^{\mathrm{S}}=\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_{xk}(\bar{r},\theta)C_{\mathrm{O1}k}\sin(\alpha_k\bar{z})\tag{30}$$

$$\Gamma_{xk}=\cos^2\theta\left[-\alpha_k K_0(\alpha_k\bar{r})+\frac{a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}}{(s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{O7}}}s_{\mathrm{O}}K_0(s_{\mathrm{O}}\bar{r})\right]-$$

$$\frac{1}{\bar{r}}K_1(\alpha_k\bar{r})\cos2\theta-a_{\mathrm{O9}}q_{\mathrm{O}}K_0(q_{\mathrm{O}}\bar{r})\sin^2\theta+$$

$$\frac{a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}}{(s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{O7}}}\frac{1}{\bar{r}}K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r})\cos2\theta+a_{\mathrm{O9}}\frac{1}{\bar{r}}K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r})\cos2\theta\tag{31}$$

由桩周和桩芯饱和土的径向位移和环向位移，可以求得饱和土的径向和环向应力，进而可求得桩周饱和土和桩芯饱和土对管桩的水平作用力分别为

$$\bar{P}_{\mathrm{O}x}=\int_0^{2\pi}\left[(\bar{p}_{\mathrm{O}}-\bar{\sigma}_{\mathrm{O}r}^{\mathrm{S}})\cos\theta+\bar{\tau}_{\mathrm{O}r\theta}\sin\theta\right]\Big|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathrm{O}}}\bar{r}_{\mathrm{O}}\mathrm{d}\theta=$$

$$2\pi\bar{r}_{\mathrm{O}}n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2\upsilon_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}-2}{1-2\upsilon_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}\alpha_k^2K_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{O}})+\frac{2\upsilon_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}-2}{1-2\upsilon_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\frac{a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}}{(s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{O7}}}s_{\mathrm{O}}^2K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})-a_{\mathrm{O9}}q_{\mathrm{O}}^2K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})\right]C_{\mathrm{O1}k}+$$

$$\left.\bar{P}_{\mathrm{O}k}+\bar{P}_{\mathrm{O}k}\right\}\sin(\alpha_k\bar{z})\tag{32}$$

$$\bar{P}_{\mathrm{I}x}=\int_0^{2\pi}\left[(\bar{p}_{\mathrm{I}}-\bar{\sigma}_{\mathrm{I}r}^{\mathrm{S}})\cos\theta+\bar{\tau}_{\mathrm{I}r\theta}\sin\theta\right]\Big|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathrm{I}}}\bar{r}_{\mathrm{I}}\mathrm{d}\theta=$$

$$2\pi\bar{r}_{\mathrm{I}}n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}G^{\mathrm{S}}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{a_{\mathrm{O10}}}{a_{\mathrm{I10}}}\left[\frac{2\upsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}-2}{1-2\upsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}}\alpha_k^2I_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{I}})-\frac{2\upsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}-2}{1-2\upsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\frac{a_{\mathrm{I6}}a_{\mathrm{I8}}}{(s_{\mathrm{I}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{I7}}}s_{\mathrm{I}}^2I_1(s_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})-a_{\mathrm{I9}}q_k^2I_1(q_k\bar{r}_{\mathrm{I}})\right]C_{\mathrm{O1}k}+$$

$$\left.\bar{P}_{\mathrm{I}k}\right\}\sin(\alpha_k\bar{z})\tag{33}$$

进而可以求得桩周饱和土和桩芯饱和土对管桩的水平动力阻抗为

$$\bar{P}(\bar{z})=\sum_{k=1}^{\infty}T_kC_{\mathrm{O1}k}\sin\alpha_k\bar{z}\tag{34}$$

式中：T_k 为无量纲化的饱和土水平动力阻抗因子，$T_k=T_{\mathrm{O}k}+T_{\mathrm{I}k}$，且有

$$T_{\mathrm{O}k}=2\pi\bar{r}_{\mathrm{O}}n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}\left[\frac{2\upsilon_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}-2}{1-2\upsilon_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}\alpha_k^2K_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{O}})+\frac{2\upsilon_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}-2}{1-2\upsilon_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}}{(s_{\mathrm{O}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{O7}}}s_{\mathrm{O}}^2K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})-a_{\mathrm{O9}}q_{\mathrm{O}}^2K_1(q_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})+\bar{P}_{\mathrm{O}k}\right],$$

$$T_{\mathrm{I}k}=2\pi\bar{r}_{\mathrm{I}}n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}G^{\mathrm{S}}\left[\frac{a_{\mathrm{O10}}}{a_{\mathrm{I10}}}\frac{2\upsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}-2}{1-2\upsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}}\alpha_k^2I_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{I}})-\frac{2\upsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}-2}{1-2\upsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{a_{\mathrm{I6}}a_{\mathrm{I8}}}{(s_{\mathrm{I}}^2-\alpha_k^2)a_{\mathrm{I7}}}s_{\mathrm{I}}^2I_1(s_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})-a_{\mathrm{I9}}q_{\mathrm{I}}^2I_1(q_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})+\bar{P}_{\mathrm{I}k}\right],$$

$$\bar{P}_{\mathrm{O}k}=a_{\mathrm{O6}}K_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{O}})-a_{\mathrm{O6}}a_{\mathrm{O8}}K_1(s_{\mathrm{O}}\bar{r}_{\mathrm{O}})\,,$$

$$\bar{P}_{\mathrm{I}k}=a_{\mathrm{I6}}I_1(\alpha_k\bar{r}_{\mathrm{I}})-a_{\mathrm{I6}}a_{\mathrm{I8}}I_1(s_{\mathrm{I}}\bar{r}_{\mathrm{I}})\,。$$

4　管桩群桩水平动力阻抗

研究刚性承台下 $n\times n$ 管桩群桩，不考虑承台质量，承台作用水平简谐荷载，荷载的无量纲化幅值为 $P_0=\tilde{P}_0/G_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}$。假设各根管桩的截面尺寸、弹性模量、密度等参数相同。为了研究管桩群桩的水平振动，管桩–饱和土–管桩之间的动力相互作用用等效 Winkler 弹簧模型来模拟，利用波的传播和叠加原理[17]通过叠加群管桩中每两根管桩的相互作用来获得任一根管桩对应的等效弹簧的水平位移，然后考虑桩周饱和土和桩芯饱和土的作用，求得考虑管桩–管桩动力相互作用影响的任一根管桩的水平作用力，进而对管桩群桩的水平振动进行求解。考虑 $n\times n$ 管桩群桩，由叠加原理可以得到管桩群桩中与任一单根管桩对应的等效 Winkler 弹簧的水平位移为

$$u_S=\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_kC_{\mathrm{O1}k}\sin(\alpha_k\bar{z})\tag{35}$$

对于 $n\times n$ 管桩群桩，可以根据式（31）分别得到相应的 Γ_k。考虑任一根管桩相应的等效弹簧位移式（35），结合式（33）可得管桩群桩中其他各根管桩对任一管桩的水平作用力为

$$\bar{P}_{iS}(\bar{z})=\sum_{k=1}^{\infty}(a_{\mathrm{O10}}-\Gamma_k)T_kC_{\mathrm{O1}k}\sin\alpha_k\bar{z}\tag{36}$$

以桩身单元为研究对象，同时考虑式（36），可以建立第 i 根管桩的水平振动方程为

$$\frac{\partial^4\bar{u}_{\mathrm{ip}}}{\partial\bar{z}^4}-\lambda_{\mathrm{p}}^4\bar{u}_{\mathrm{ip}}=-\frac{4}{\pi\bar{E}_{\mathrm{p}}(\bar{r}_{\mathrm{O}}^2-\bar{r}_{\mathrm{I}}^2)}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{\mathrm{O10}}-\Gamma_k)T_kC_{\mathrm{O1}k}\sin\alpha_k\bar{z}\tag{37}$$

式中：$\bar{u}_{\mathrm{ip}}=\tilde{u}_{\mathrm{ip}}/H$，$\tilde{u}_{\mathrm{ip}}$ 为第 i 根管桩水平位移幅值；

$\lambda_{\mathrm{p}}^4=\dfrac{4\bar{\rho}_{\mathrm{p}}\bar{\omega}^2}{(\bar{r}_{\mathrm{O}}^2+\bar{r}_{\mathrm{I}}^2)\bar{E}_{\mathrm{p}}}$，$\bar{\rho}_{\mathrm{p}}=\rho_{\mathrm{p}}/\rho_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}$，$\bar{E}_{\mathrm{p}}=E_{\mathrm{p}}/G_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}$，$E_{\mathrm{p}}$、$\rho_{\mathrm{p}}$ 分别为桩身弹性模量和密度。

则式（37）的通解为

$$\bar{u}_{i\mathrm{p}}(\bar{z})=A_{\mathrm{p1}}\cosh\lambda_{\mathrm{p}}\bar{z}+A_{\mathrm{p2}}\sinh\lambda_{\mathrm{p}}\bar{z}+A_{\mathrm{p3}}\cos\lambda_{\mathrm{p}}\bar{z}+A_{\mathrm{p4}}\sin\lambda_{\mathrm{p}}\bar{z}-\frac{4}{\pi\bar{E}_{\mathrm{p}}(\bar{r}_{\mathrm{O}}^2-\bar{r}_{\mathrm{I}}^2)}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{\mathrm{O10}}-\Gamma_k)T_kC_{\mathrm{O1}k}\sin\alpha_k\bar{z} \tag{38}$$

式中：A_{p1}、A_{p2}、A_{p3}、A_{p4} 为待定系数。

假设第 i 根管桩桩顶的无量纲水平作用力为 P_{i0}，第 i 根管桩桩端的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}_{i\mathrm{p}}(\bar{z})=0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{z}}\bar{u}_{i\mathrm{p}}(\bar{z})=0,\ \bar{z}=0\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{z}}\bar{u}_{i\mathrm{p}}(\bar{z})=0,-\frac{\pi}{4}(\bar{r}_{\mathrm{O}}^4-\bar{r}_{\mathrm{I}}^4)\bar{E}_{\mathrm{p}}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\bar{z}^3}\bar{u}_{i\mathrm{p}}(\bar{z})=P_{i0},\bar{z}=1\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

由式（38）、（39）可以确定 A_{p1}、A_{p2}、A_{p3}、A_{p4} 的表达式，此处略去表达式。考虑式（29）、（38）则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{\mathrm{O10}}C_{\mathrm{O1}k}\sin(\alpha_k\bar{z})=A_{\mathrm{p1}}\cosh\lambda_{\mathrm{p}}\bar{z}+A_{\mathrm{p2}}\sinh\lambda_{\mathrm{p}}\bar{z}+A_{\mathrm{p3}}\cos\lambda_{\mathrm{p}}\bar{z}+A_{\mathrm{p4}}\sin\lambda_{\mathrm{p}}\bar{z}-\frac{2}{\pi\bar{E}_{\mathrm{p}}(\bar{r}_{\mathrm{O}}^2-\bar{r}_{\mathrm{I}}^2)}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{\mathrm{O10}}-\Gamma_k)T_kC_{\mathrm{O1}k}\sin\alpha_k\bar{z} \tag{40}$$

将 A_{p1}、A_{p2}、A_{p3}、A_{p4} 代入式（40），并利用三角函数的正交性可得

$$C_{\mathrm{O1}k}=\frac{2P_{i0}(\cosh\lambda_{\mathrm{p}}-\cos\lambda_{\mathrm{p}})(f_{1k}-f_{3k})}{a_{\mathrm{O11}}}+\frac{2P_{i0}(\sin\lambda_{\mathrm{p}}+\sinh\lambda_{\mathrm{p}})(f_{4k}-f_{2k})}{a_{\mathrm{O11}}} \tag{41}$$

式中：$f_{1k}=\dfrac{\alpha_k-(-1)^k\lambda_{\mathrm{p}}\sinh\lambda_{\mathrm{p}}}{\lambda_{\mathrm{p}}^2+\alpha_k^2}$；

$f_{2k}=\dfrac{(-1)^{k+1}\lambda_{\mathrm{p}}\cosh\lambda_{\mathrm{p}}}{\lambda_{\mathrm{p}}^2+\alpha_k^2}$；$f_{3k}=-\dfrac{\alpha_k+(-1)^k\lambda_{\mathrm{p}}\sin\lambda_{\mathrm{p}}}{\lambda_{\mathrm{p}}^2-\alpha_k^2}$；

$f_{4k}=\dfrac{(-1)^k\lambda_{\mathrm{p}}\cos\lambda_{\mathrm{p}}}{\lambda_{\mathrm{p}}^2-\alpha_k^2}$；

$a_{\mathrm{O11}}=\dfrac{1}{2}a_{\mathrm{O10}}\pi(\bar{r}_{\mathrm{O}}^4-\bar{r}_{\mathrm{I}}^4)\bar{E}_{\mathrm{p}}\lambda_{\mathrm{p}}^3(\cosh\lambda_{\mathrm{p}}\sin\lambda_{\mathrm{p}}+\cos\lambda_{\mathrm{p}}\cdot\sinh\lambda_{\mathrm{p}})+4(\bar{r}_{\mathrm{O}}^2+\bar{r}_{\mathrm{I}}^2)\lambda_{\mathrm{p}}^2\cos\lambda_{\mathrm{p}}\cosh\lambda_{\mathrm{p}}(f_{1k}-f_{3k})\alpha_k(a_{\mathrm{O10}}-\Gamma_k)T_k+(\bar{r}_{\mathrm{O}}^2+\bar{r}_{\mathrm{I}}^2)\lambda_{\mathrm{p}}^3(\cosh\lambda_{\mathrm{p}}\sin\lambda_{\mathrm{p}}+\cos\lambda_{\mathrm{p}}\sinh\lambda_{\mathrm{p}})(a_{\mathrm{O10}}-\Gamma_k)T_k-(\bar{r}_{\mathrm{O}}^2+\bar{r}_{\mathrm{I}}^2)\lambda_{\mathrm{p}}^2(4\cosh\lambda_{\mathrm{p}}\sin\lambda_{\mathrm{p}}f_{4k}+4\cos\lambda_{\mathrm{p}}\cdot\sinh\lambda_{\mathrm{p}}f_{2k})\alpha_k(a_{\mathrm{O10}}-\Gamma_k)T_k$。

由此可以完全确定管桩群桩中第 i 根管桩的水平位移为

$$\bar{u}_{i\mathrm{p}}(\bar{z})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a_{\mathrm{O10}}P_{i0}(\cosh\lambda_{\mathrm{p}}-\cos\lambda_{\mathrm{p}})(f_{1k}-f_{3k})}{a_{\mathrm{O11}}}\sin(\alpha_k\bar{z})+\frac{2a_{\mathrm{O10}}P_{i0}(\sin\lambda_{\mathrm{p}}+\sinh\lambda_{\mathrm{p}})(f_{4k}-f_{2k})}{a_{\mathrm{O11}}}\sin(\alpha_k\bar{z}) \tag{42}$$

对于刚性承台下 $n\times n$ 管桩群桩，不考虑承台质量，在承台无量纲水平荷载为 P_0 作用下，各根管桩桩顶满足如下位移协调条件和平衡条件：

$$\bar{u}_{1\mathrm{p}}(1)=\bar{u}_{2\mathrm{p}}(1)=\cdots=\bar{u}_{n\mathrm{p}}(1)=u^{\mathrm{G}} \tag{43}$$

$$P_0=\sum_{i=1}^{n}P_{i0} \tag{44}$$

式中：u^{G} 为管桩群桩桩顶水平位移。

由式（43）、（44）可以求得各根管桩和管桩群桩桩顶的水平位移以及各根管桩承担的水平荷载 P_{i0}，进而根据群桩水平动力阻抗的定义可以得到管桩群桩的水平动力阻抗[18]，其水平动力阻抗实部 K^{G} 和虚部 C^{G} 分别为管桩群桩水平动刚度和动阻尼。

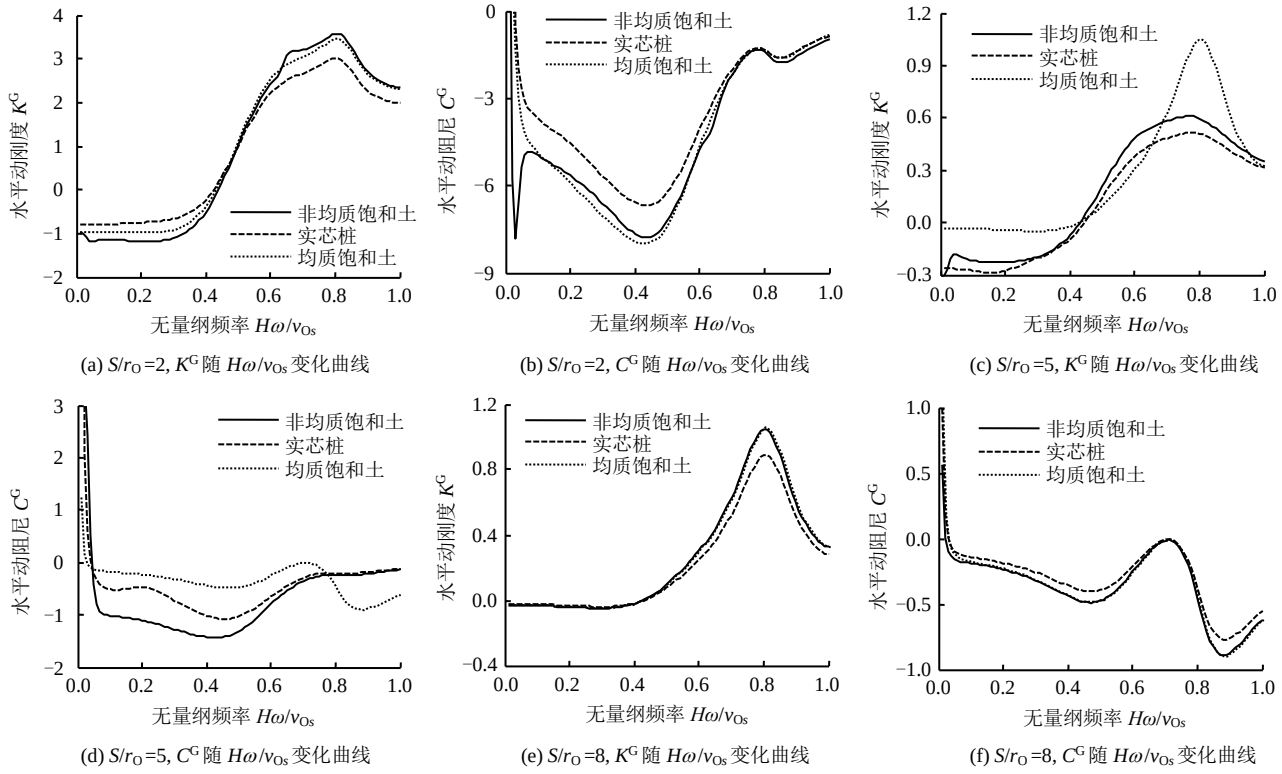
5 数值算例与讨论

笔者以饱和土中 2×2 管桩群桩为例分析和讨论主要桩-土物理参量对饱和土中管桩群桩水平振动特性的影响。在不作说明时图中相关参数取值为 $n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{S}}=n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}=0.67$、$n_{\mathrm{O}}^{\mathrm{F}}=n_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}}=0.33$、$S_{\mathrm{O}\upsilon}=S_{\mathrm{I}\upsilon}=0.05$、$\upsilon_{\mathrm{O}}=\upsilon_{\mathrm{I}}=0.35$、$\bar{E}_{\mathrm{p}}=1\,000$、$\bar{\rho}_{\mathrm{O}}=\bar{\rho}_{\mathrm{I}}=2.0$、$\rho^{\mathrm{S}}=2.0$、$\bar{\rho}_{\mathrm{p}}=2.5$、$\bar{S}=S/r_{\mathrm{O}}=5$、$\bar{r}_{\mathrm{O}}=r_{\mathrm{O}}/H=1/20$、$\bar{r}_{\mathrm{I}}=r_{\mathrm{I}}/H=0.5/20$。

图 2 分别给出了桩间距 S/r_{O}=2、5、8 时非均质（桩周土和桩芯土性质不同）饱和土、均质（桩周土和桩芯土性质相同）饱和土中 2×2 管桩群桩以及实芯群桩水平动力阻抗随无量纲频率($H\omega/v_{\mathrm{Os}}$)的变化曲线。可以看出，饱和土中管桩群桩可以退化到饱和实芯群桩的情形，且非均质饱和土可以退化到均质饱和土的情形；另外，无论桩间距是多少，实芯群桩与管桩群桩的水平动力阻抗都存在一定的差异，且两者的差异与桩间距有关，当桩间距较小（S/r_{O}=2、5）时两者的差异较大，而当桩间距较大（S/r_{O}=8）时两者的差异较大，这可能是因为桩间距过小时管桩与管桩的作用可以看作一个整体，而桩间距过大时，管桩与管桩的相互作用可能已被弱化。

桩芯饱和土与桩周饱和土剪切模量比对管桩群桩的影响见图 3。在低频($H\omega/v_{\mathrm{Os}}$<0.5)时，桩芯饱和土与桩周饱和土剪切模量比越小，群管桩的水平动刚度的绝对值越大，而动阻尼的绝对值越小，这是

因为桩芯饱和土与桩周饱和土剪切模量比减小时，桩周饱和土剪切模量增大，由于管桩外径较大，此时桩周饱和土对管桩的作用较大，从而导致管桩群桩的水平动刚度增大。而无量纲频率较大时，桩芯饱和土与桩周饱和土剪切模量比对管桩群桩的水平动刚度和动阻尼几乎没有影响。管桩长径比 H/r_o 对管桩群桩的影响较大，如图 4 所示。管桩的长径比越小，管桩群桩的水平动刚度越大，水平动阻尼的绝对值也越大，水平动刚度和动阻尼随无量纲频率变化曲线的峰值越大。这是因为，当桩长一定时，桩径比越小，管桩外径越大，桩周饱和土对管桩的作用越大，从而导致管桩群桩的水平动刚度和水平动阻尼绝对值增大。图 5 为管桩外径一定时，管桩内径不同时，亦即管桩壁厚对饱和土中管桩群桩水平动力阻抗的影响，管桩内径越大，管桩与桩芯土的接触面积越大，此时桩芯土对管桩的作用力越大，相应的水平动刚度和动阻尼的绝对值越大，但考虑到管桩的稳定性管桩不易过薄。

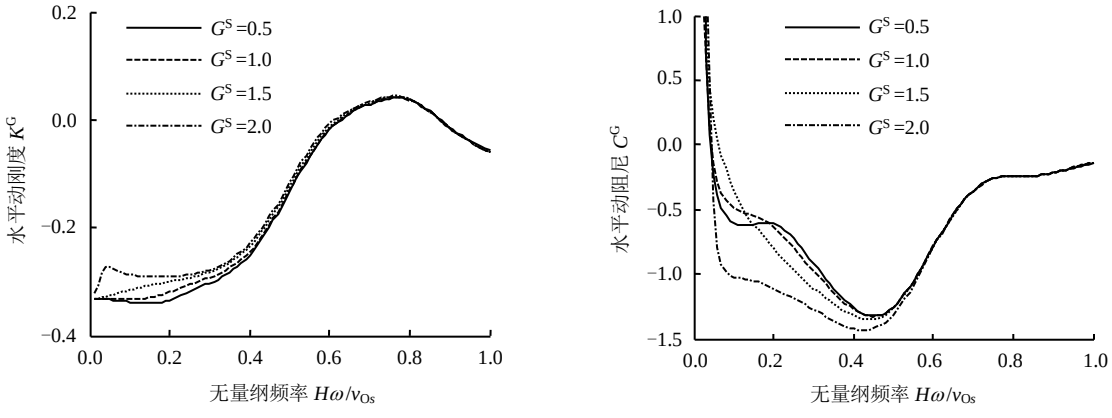


(a) S/r_O=2, K^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线　(b) S/r_O=2, C^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线　(c) S/r_O=5, K^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线

(d) S/r_O=5, C^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线　(e) S/r_O=8, K^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线　(f) S/r_O=8, C^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线

图 2　不同桩间距时 2×2 管桩群桩的水平动力阻抗

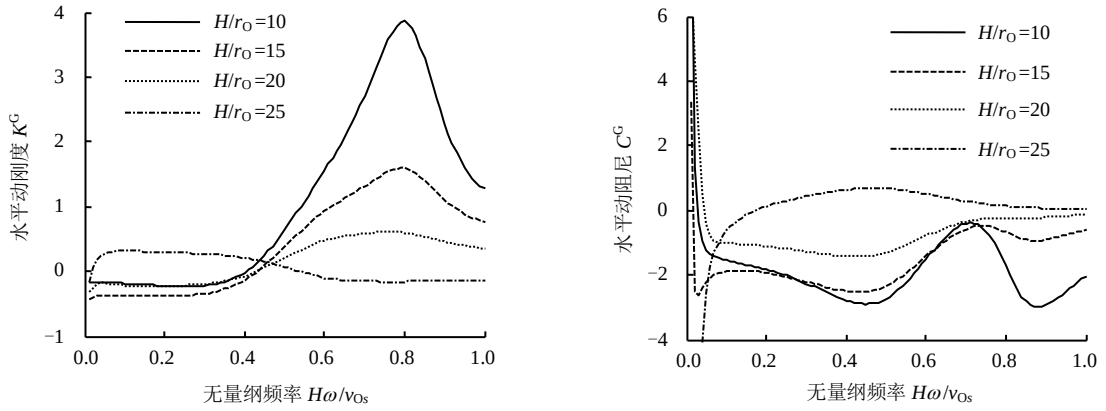
Fig.2　Horizontal dynamic impedance of 2×2 pipe pile groups for different pile spacings



(a) K^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线　(b) C^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线

图 3　桩芯饱和土桩周饱和土剪切模量比对 2×2 管桩群桩水平动力阻抗的影响(S/r_O=5)

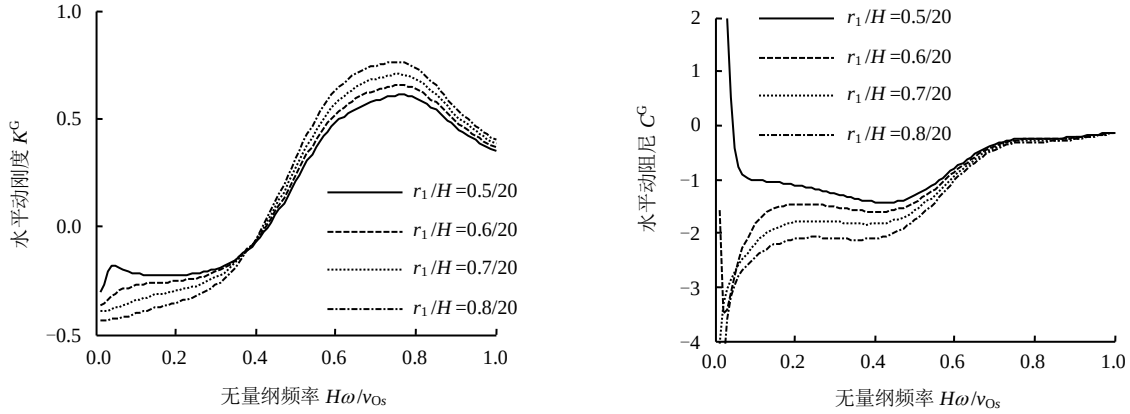
Fig.3　Influence of shear modulus ratio of pipe pile core saturated soil and saturated soil around pipe pile on horizontal dynamic impedance of 2×2 pipe pile groups (S/r_O=5)



(a) K^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线　　(b) C^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线

图 4　管桩长径比对 2×2 管桩群桩水平动力阻抗的影响(S/r_O=5)

Fig.4　Influence of length to diameter ratio of pipe pile on horizontal dynamic impedance of 2×2 pipe pile groups (S/r_O=5)



(a) K^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线　　(b) C^G 随 $H\omega/v_{Os}$ 变化曲线

图 5　管桩壁厚对 2×2 管桩群桩水平动力阻抗的影响(S/r_O=5)

Fig.5　Influence of pipe pile wall thickness on horizontal dynamic impedance of 2×2 pipe pile groups (S/r_O=5)

6 结 论

（1）本文基于多孔介质理论、波的传播理论和叠加原理，在考虑三维波动效应的情况下对饱和土中管桩群桩的水平振动进行了研究，得到了饱和土中管桩群桩的水平动力阻抗，并以 2×2 管桩群桩为例进行了参数分析。

（2）实芯群桩与管桩群桩的水平动力阻抗存在差异，实际工程中应考虑桩芯饱和土对管桩群桩水平振动的影响。

（3）实芯群桩与管桩群桩水平动力阻抗的差异与桩间距有关，桩间距较小时差异较大。

（4）桩芯饱和土与桩周饱和土剪切模量比对饱和土中管桩群桩水平动力阻抗的影响与频率有一定的关系，在频率较小时桩周饱和土和桩芯饱和土性质的差异对管桩群桩水平动力阻抗的影响不应被忽略。

（5）管桩的长径比和管桩壁厚对管桩群桩水平动力阻抗影响较大，管桩的长径比越小，管桩内径越大，管桩群桩的水平动力阻抗越大。

（6）在设计中需要重点考虑桩身尺寸对管桩群桩水平振动的影响，特别是管桩桩长和壁厚的影响。

参 考 文 献

[1] NOVAK M, NOGAMI T. Soil-pile interaction in horizontal vibration[J]. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, 1977, 5(3): 263－281.

[2] LI Shi, XU Chang-jie, CAI Yuan-qiang, et al. Dynamic impedances and free-field vibration analysis of pile groups in saturated[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2014, 333(16): 3709－3731.

[3] MYLONAKIS G, GAZETAS G. Lateral vibration and internal forces of grouped piles in layered soils[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1999, 125(1): 16－25.

[4] 姚庆钊, 刘林超, 闫启方. 分数阶三维积分型黏弹性土体中单桩的水平动力阻抗研究[J]. 水利学报, 2013, 44(7): 835－841.
YAO Qing-zhao, LIU Lin-chao, YAN Qi-fang. Horizontal dynamic impedance of single pile in viscoelastic soil described by three-dimensional integral constitutive model[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2013, 44(7): 835－841.

[5] 闻敏杰, 徐金明. 非完全黏结下饱和土中桩扭转振动的解析解[J]. 工程力学, 2014, 31(7): 156－161.
WEN Min-jie, XU Jin-ming. Analytical solution for torsional of a pile in saturated soil considering imperfect contact[J]. **Engineering Mechanics**, 2014, 31(7): 156－161.

[6] GHASEMZADEH H, ALIBEIKLOO M. Pile-soil-pile interaction in pile groups with batter piles under dynamic loads[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2011, 31(8): 1159－1170.

[7] 郑长杰, 丁选明, 栾鲁宝. 黏弹性地基中管桩水平动力特性分析[J]. 岩土力学, 2017, 38(1): 26－32, 40.
ZHENG Chang-jie, DING Xuan-ming, LUAN Lu-bao. Analysis of lateral dynamic response of pipe pile in viscoelastic soil layer[J]. **Rock and Soil Mechanics**,, 2017, 38(1): 26－32, 40.

[8] 吴文兵, 蒋国盛, 王奎华, 等. 土塞效应对管桩纵向动力特性的影响研究[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(6): 1129－1141.
WU Wen-bing, JIANG Guo-sheng, WANG Kui-hua, et al. Influence of soil plug effect on vertical dynamic response of pipe piles[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2014, 36(6): 1129－1141.

[9] 沈纪苹, 陈蕾. 基于传递矩阵法的层状土中管桩水平动力阻抗分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(10): 2810－2811.
SHEN Ji-ping, CHEN Lei. Analysis of horizontal dynamic impedance of pipe pile in layered soils based on transfer-matrix formulation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(10): 2810－2811.

[10] 杨文领, 刘世美, 林滨滨. 基于桩土相互作用的管桩桩顶扭转复刚度研究[J]. 郑州大学学报(工学版), 2012, 33(1): 38－39.
YANG Wen-ling, LIU Shi-mei, LIN Bin-bin. Coupling complex stiffness pipe pile based on pile-soil interaction[J]. **Journal of Zhengzhou University (Engineering Science)**, 2012, 33(1): 38－39.

[11] 郑长杰, 刘汉龙, 丁选明, 等. 饱和黏性土地基中现浇大直径管桩水平振动响应解析解[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(8): 1447－1454.
ZHENG Chang-jie, LIU Han-long, DING Xuan-ming, et al. Analytical solution of horizontal vibration of cast-in-place large-diameter pipe piles in saturated soils[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2014, 36(8): 1447－1454.

[12] 靳建明, 张智卿, 吴章土, 等. 饱和土中管桩的扭转振动特性研究[J]. 振动与冲击, 2015, 34(11): 52－57, 92.
JIN Jian-ming, ZHANG Zhi-qing, WU Zhang-tu, et al. Torsional vibration of a pipe pile embedded in a porous-saturated soil[J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2015, 34(11): 52－57, 92.

[13] 刘林超, 闫启方. 饱和土中管桩的水平动阻抗研究[J]. 岩土力学, 2014, 35(5): 1348－1356.
LIU Lin-chao, YAN Qi-fang. Study of lateral dynamic impedance of pipe pile in saturated soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(5): 1348－1356.

[14] 刘林超, 闫启方. 饱和土中管桩的纵向振动特性[J]. 水利学报, 2011, 42(3): 366－372, 378.
LIU Lin-chao, YAN Qi-fang. Vertical vibration characteristics of pipe pile in saturated soil[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2011, 42(3): 366－372, 378.

[15] DE BOER R, KATSUBE N. Theory of porous media: Highlights in historical development and current state[J]. **Applied Mechanics Reviews**, 2002, 55(2): 32－33.

[16] XIAO Y, CHANGJUN C. Gurtin variational principle and finite element simulation for dynamical problems of fluid-saturated porous media[J]. **Acta Mechanica Solida Sinica**, 2003, 16(1): 24－32.

[17] DOBRY R, GAZETAS G. Simple method for dynamic stiffness and damping of floating pile groups[J]. **Geotechnique**, 1988, 38(4): 557－574.

[18] 黄茂松, 吴志明, 任青. 层状地基中群桩的水平振动特性[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(1): 32－38.
HUANG Mao-song, WU Zhi-ming, REN Qing. Lateral vibration of pile groups in layered soil[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2007, 29(1): 32－38.